**§ 3. Интегрирование функции комплексной переменной**

(окончание лекции)

**п.1 Определение, свойства и правила вычисления интеграла ФКП**

Вычисление интеграла  от функции  комплексной переменной  по кривой  сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода от действительных функций  и  действительных переменных  по формуле

. (3)

Формулу (3) можно записать в удобном для запоминания виде:

. 

Пусть гладкая кривая  задана параметрически уравнением , . Тогда формула  преобразуется в формулу

. (4)

***Свойства интеграла от ФКП***

1. ;
2. , где  – комплексные числа;
3. (Оценка модуля интеграла). Если  во всех точках кривой , то

, где – длина кривой .

1. , где .

***Правило нахождения интеграла от ФКП:***

1. Записываем  в алгебраической форме

.

1. Используя формулу (3), представляем искомый интеграл в виде суммы двух криволинейных интегралов второго рода от функций  и  двух действительных переменных .
2. Записываем уравнение кривой  в явном виде  (или ).
3. Вычисляем криволинейные интегралы, сводя их к определенным, и записываем ответ.

***Пример 1.*** Вычислить интеграл

,

где  – часть параболы  от точки  до точки .

*Решение*. ▲ **1)** Запишем подынтегральную функцию в алгебраической форме:

.

**2)** Применим формулу (3):

.

**3)** Так как  – часть параболы  (уравнение уже записано в явном виде), то .

1. Вычисляем КРИ-2, сводя их к определенным:





. ▲

В случае ***параметрического задания пути интегрирования*** используется следующее ***правило вычисления  от непрерывной функции :***

1. Записать параметрическое уравнение кривой  и из него определить пределы интегрирования:  соответствует начальной точке пути интегрирования,  – конечной;
2. Найти дифференциал комплекснозначной функции : ;
3. Подставить  в подынтегральное выражение, преобразовать интеграл к виду ;
4. Вычислить полученный в п. **3)** определенный интеграл от комплекснозначной функции действительной переменной.

***Пример 2.*** Вычислить интеграл

,

где  – верхняя полуокружность  с обходом против часовой стрелки.

*Решение*. ▲ В данном случае удобно воспользоваться уравнением кривой  в параметрической форме  и применить формулу (4).

1. Так как , то .
2. По формуле (4): . ▲

**п.2 Интегральная теорема Коши**

***Теорема (****Интегральная теорема Коши****).*** Пусть в односвязной области D задана однозначная аналитическая функция . Тогда интеграл от  по любому замкнутому контуру Г, целиком лежащему в области D, равен нулю, т.е.

. (5)

(*Без доказательства*)

***Следствие.*** Пусть функция  является аналитической в многосвязной области D и на ее границе, которая состоит из внешнего контура Г и внутренних контуров . Тогда

, (6)

где при движении вдоль контуров  область D находится слева.

(*Без доказательства*)

***Пример 3.*** Вычислить .

*Решение*. ▲ Функция  является аналитической во всей комплексной плоскости **С**, в том числе и в круге . Следовательно, по интегральной теореме Коши, . ▲

**п.3 Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница**

Пусть  – аналитическая в односвязной области D функция, а  – кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D и соединяющая точки  и . Тогда, в силу соотношений Коши-Римана, интеграл  не зависит от пути интегрирования (т.е. от вида кривой , соединяющей точки  и ), а зависит только от самих начальной и конечной точек. Если зафиксировать начальную точку , а конечную точку  изменять, то значение интеграла будет зависеть только от точки , т.е.  определяет некоторую функцию в области D. В этом случае принято обозначать

. (7)

Функция  называется *интегралом с переменным верхним пределом*. Имеет место следующая теорема.

***Теорема (****Мореры****).*** Пусть функция  непрерывна в односвязной области D и интеграл  не зависит от пути интегрирования , соединяющего начальную и конечную точки из D. Тогда функция (7) является аналитической в D, причем , т.е.  является первообразной для  в D.

(*Без доказательства*)

Множество всех первообразных для  в D называется *неопределенным интегралом* *от*  и обозначается .

Итак, .

Если  – функция, аналитическая в односвязной области D, то интеграл , где  – кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D и соединяющая точки  и , может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

, (8)

где  – первообразная для  в D.

Интегралы от элементарных функций комплексной переменной в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе: используются свойства интегралов, таблица интегралов, правила интегрирования.

Например, 

.

**п.4 Интегральная формула Коши**

***Теорема.*** Пусть функция  аналитична в замкнутой односвязной области  и Г – граница этой области. Тогда имеет место формула

, (9)

где  – произвольная точка внутри области D, а интегрирование по контуру Г производится в положительном направлении (т.е. против хода часовой стрелки).

Интеграл в правой части равенства (9), называется *интегралом Коши*, а сама формула (9) называется *интегральной формулой Коши*.

Формула (9) позволяет находить значения аналитической функции  в любой точке , лежащей внутри области D через ее значения на границе этой области.

Формула (9) справедлива и для многосвязной области, причем в этом случае каждый из контуров обходится так, чтобы область D оставалась слева.

Из интегральной формулы Коши вытекают следующие теоремы.

***Теорема.*** Для всякой дифференцируемой в точке  функции  существуют производные всех порядков, причем *n*-я производная имеет вид:

. (10)

Таким образом, аналитическая в области D функция всюду в D имеет производные любого порядка *n*, т.е. она бесконечно дифференцируема.

***Теорема.*** В окрестности каждой точки , где существует производная , функция  может быть представлена сходящимся рядом:

 . (11)

Формулы (9) и (10) можно использовать для вычисления интегралов по замкнутым контурам, а именно:

, 

. 

***Пример 4.*** Вычислить  в следующих случаях задания контура интегри-рования Г: а) ; б) ; в) .

*Решение*. ▲ Находим нули знаменателя – особые точки подынтегральной функции. Это точки . Далее нужно определить расположение особых точек относительно контура интегрирования. В случае а) ни одна из этих точек не входит в область, ограниченную контуром. В этом можно убедиться, использовав чертеж. Контур  – окружность с центром в начале координат  и радиусом  Можно определить принадлежность точки области иначе, а именно определить ее расстояние от центра круга и сравнить с величиной радиуса. Например, для точки  это расстояние равно , что больше радиуса , поэтому  не принадлежит кругу . Аналогично определяется, что точка  также не принадлежит кругу . Следовательно, подынтегральная функция  является аналитической в области , и в силу теоремы Коши .

б) Область интегрирования  представляет собой окружность с центром в точке  и радиусом . Внутри этой области расположена одна особая точка . Поэтому применить интегральную теорему Коши нельзя. Перепишем подынтегральную функцию в виде дроби , где числитель  – функция, аналитическая в данной области . Применяя интегральную формулу Коши в виде , получим:

.

в) Контур интегрирования  – окружность с центром в точке  и радиусом . Внутри этого контура расположены обе особые точки. В этом случае запишем исходный интеграл в виде суммы двух интегралов:

,

где каждый из контуров  и  охватывает только одну из особых точек. В качестве  возьмем контур, который охватывает точку , например окружность . Тогда, записывая подынтегральную функцию в виде дроби , где числитель  – функция, аналитическая в области  и применяя интегральную формулу Коши в виде , получим:

.

В качестве контура  можно взять окружность  из пункта б), которая содержит особую точку  и воспользоваться результатами, полученными в этом пункте. Имеем:

.

В результате получим:

. ▲

***Пример 5.*** Вычислить .

*Решение*. ▲ Внутри круга и на его границе  функция  является аналитической. Следовательно, по формуле (10), имеем:

. ▲